

УДК 539.3

**ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ТЕРМОУПРУГИХ FGM***А.О. Ватульян, С.А. Нестеров***Аннотация**

В настоящее время в различные области техники широко внедряются Функционально-градиентные материалы (FGM). FGM – неоднородные материалы, позволяющие оптимизировать сложные конструкции. Эффективность применения таких материалов зависит от знания точных законов неоднородности. Ранее авторами был предложен подход по решению коэффициентных обратных задач термоупругости для стержня. В данной работе этот подход распространен на решение задачи для цилиндра. Прямая задача для цилиндра решена на основе совместного использования преобразования Лапласа и метода пристрелки. Для решения обратной задачи на основе соотношения взаимности получены операторные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми и измеряемыми характеристиками. Проведены вычислительные эксперименты и представлен их анализ.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, обратная задача, термоупругость, стержень, цилиндр

1. Введение

Для анализа прочности различных элементов конструкций часто приходится решать задачи, связанные с нахождением полей температуры и напряжений в рамках модели линейной термоупругости. Многие годы такие расчеты проводились для однородных и слоистых материалов. Однако широкое внедрение в технику термоупругих функционально-градиентных материалов [1, 2] потребовало совершенства математических моделей, описывающих поведение этих материалов. В таких моделях коэффициенты дифференциальных операторов термоупругости не являются константами, а зависят от координат. Практическая ценность функционально-градиентных материалов зависит от знания точных законов неоднородности. В связи с этим актуальным является разработка методов идентификации характеристик неоднородных термоупругих тел, т.е. решение коэффициентных обратных задач термоупругости для FGM. К настоящему времени накоплен достаточно большой опыт исследования обратных задач теплопроводности и теории упругости, который достаточно полно изложен в монографиях [3, 4]. Обычно на практике исследование обратных задач сводится к решению соответствующих экстремальных задач [3, 5]. Для этого вводится неквадратичный функционал невязки, который минимизируется в конечномерном подпространстве при помощи градиентных методов. Следует учесть, что использование градиентных методов минимизации требует существенных затрат машинного времени и обладает рядом других недостатков, поэтому поиск альтернативных методов решения продолжается. Небольшое количество работ по исследованию КОЗ термоупругости [5, 6, 7] связано с тем, что дифференциальные уравнения термоупругости не относятся ни к параболическому, ни к гиперболическому типу. Однако в ряде работ

[8, 9] на основе применения обобщенного соотношения взаимности и метода линеаризации были получены операторные уравнения для решения задач механики связанных полей, в т.ч. термоупругости. Так в [9] были получены линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для нахождения поправок восстанавливаемых термомеханических характеристик для стержня и проведены вычислительные эксперименты по их восстановлению. Существенно важно обобщить этот подход на решение обратных задач термоупругости для тел более сложной геометрии, например, для цилиндра. Это особенно важно для правильного построения неразрушающего контроля трубопроводов из FGM. В данной работе сначала приводится постановка и решение задачи для стержня. При этом в отличие от ранее проведенных исследований [9] восстанавливаются законы неоднородности с большим изменением функций в окрестности центра стержня. Затем приводится постановка и решение задачи для цилиндра. прямая задача для цилиндра после обезразмеривания и преобразования Лапласа решается методом пристрелки. Обращение полученных решений в трансформантах осуществляется методом Дурбина. Обратная задача на основе обобщенного соотношения взаимности сводится к поэтапному решению соответствующего интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Проведен ряд вычислительных экспериментов. Даны рекомендации для практического использования предложенного подхода.

2. Задача термоупругости для стержня

В качестве первого примера рассмотрим одномерную задачу о продольных колебаниях неоднородного термоупругого стержня длины l под действием приложенной к торцу $x = l$ силы $F = p_0 \lambda(t)$. Начально – краевая задача имеет вид [9]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x) \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = c(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (3)$$

$$\theta(0, t) = u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0, \quad \sigma_x(l, t) = p_0 \lambda(t), \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (5)$$

Перейдем в (1)-(5) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая:

$$\begin{aligned} z = \frac{x}{l}, \quad z \in [0, 1], \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0}, \\ \bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(zl)}{\gamma_0}, \quad t_1 = \frac{l^2 c_0}{k_0}, \quad t_2 = l \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \tau = \frac{t}{t_2}, \quad W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}, \\ \delta = \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_0 E_0}, \quad \varepsilon = \frac{t_2}{t_1} = \frac{k_0}{c_0 l} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \mu = \frac{p_0}{E_0}, \quad k_0 = \max_{x \in [0, l]} k(x), \quad c_0 = \max_{x \in [0, l]} c(x), \\ E_0 = \max_{x \in [0, l]} E(x), \quad \rho_0 = \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad \gamma_0 = \max_{x \in [0, l]} \gamma(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Обезразмеренная начально-краевая задача примет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (7)$$

$$\Omega = \bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W, \quad (8)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} \quad (9)$$

$$U(0, \tau) = W(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad \Omega(1, \tau) = \mu \lambda(\tau), \quad (10)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (11)$$

Для решения прямой задачи применяется метод сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах по Лапласу. Для этого в [9] были получены интегральные уравнения относительно трансформант безразмерной температуры $\tilde{W}(z, p)$ и напряжения $\tilde{\Omega}(z, p)$:

$$\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_2(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi + f_1(p), \quad (12)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_4(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi. \quad (13)$$

Здесь ядра системы интегральных уравнений и правая часть имеют вид:

$$\begin{aligned} K_1(z, \xi, p) &= -\frac{p}{\varepsilon} (\bar{c}(\xi) + \delta \frac{\bar{\gamma}^2(\xi)}{E(\xi)}) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{k(\eta)}, \quad K_2(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon} \delta \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{E(\xi)} \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{k(\eta)}, \\ K_3(z, \xi, p) &= -p^2 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{E(\xi)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad K_4(z, \xi, p) = -p^2 \frac{1}{E(\eta)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad f_1(p) = \\ &= -\mu \tilde{\lambda}(p). \end{aligned}$$

Решение системы (12)-(13) проводилось на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Для нахождения оригиналов температуры и напряжения в работе применялась теория вычетов.

3. Задача термоупругости для цилиндра

В качестве второго примера исследуем одномерную задачу о радиальных колебаниях неоднородного длинного полого цилиндра. Рассмотрим длинный цилиндр, у которого радиусы наружной и внутренней цилиндрической поверхности соответственно равны b и a . Пусть колебания цилиндра вызываются действием равномерно распределенной нагрузки (механической или тепловой), приложенной на внешней границе $r = b$. Из симметричности нагрузки и геометрии области следует, что из компонент поля перемещения отличной от нуля является только радиальная компонента, которая есть функция радиуса: $u_r = u(r)$, $u_\varphi = u_z = 0$. Начально-краевая задача в случае тепловой нагрузки имеет вид [10]:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \gamma \theta, \quad (14)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} - \gamma \theta, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k(r) r \frac{\partial \theta}{\partial r}) = c_\varepsilon(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (17)$$

$$\theta(r, 0) = u(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = 0, \quad (18)$$

$$\sigma_{rr}(a, t) = \sigma_{rr}(b, t) = q(a, t) = 0, \quad q(b, t) = q_0 \varphi(t). \quad (19)$$

После обезразмеривания, выполненного аналогично задаче для стержня прямая задача для цилиндра решается методом пристрелки. Для этого после применения преобразования Лапласа к обезразмеренной краевой задаче после некоторых преобразований получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка вида:

$$\tilde{X}' = A\tilde{X} \quad (20)$$

Поиск решения системы (20) осуществляется в виде:

$$\tilde{X} = \alpha_1 \tilde{X}^{(1)} + \alpha_2 \tilde{X}^{(2)} + \tilde{X}^{(0)} \quad (21)$$

Здесь $\tilde{X}^{(1)}$, $\tilde{X}^{(2)}$ – решения задач Коши с разными граничными условиями на внутренней поверхности цилиндра. Постоянные α_1 и α_2 находят из решения системы двух уравнений, при которой удовлетворяются заданные граничные условия на внешней поверхности цилиндра.

Для нахождения оригиналов функций по их трансформантам нужно применить обратное преобразование Лапласа, т.е. вычислить контурный интеграл:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{F}(p) e^{pt} dp, \quad (22)$$

где интеграл берется вдоль прямой $Re p = a \geq a_0$.

Подставив в (22) $dp = i d\omega$, $p = a + i\omega$, получим: $F(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re(\tilde{F}(a + i\omega)) d\omega$,
 $F(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^\infty (Re(\tilde{F}(a + i\omega)) \cos \omega t - Im(\tilde{F}(a + i\omega)) \sin \omega t) d\omega$, $t > 0$.

В 1974 г. Durbin F. [11] разработал численный метод для вычисления таких интегралов на основе представления:

$$F(t) \approx \frac{2e^{at}}{T} \left(-\frac{1}{2} Re(\tilde{F}(a)) + \sum_{k=0}^{\infty} (Re(\tilde{F}(a + i \frac{2\pi k}{T})) \cos(k \frac{2\pi t}{T}) - Im(\tilde{F}(a + i \frac{2\pi k}{T})) \sin(k \frac{2\pi t}{T})) \right). \quad (23)$$

Этот метод дает хорошие результаты для короткого временного интервала.

4. Решение обратных задач термоупругости

В обратной задаче термоупругости требуется определить одну из термомеханических характеристик при известных остальных по некоторой дополнительной информации о физических полях, известных на части границы тела. Например, в случае продольных колебаний стержня, в качестве дополнительной информации выступает либо торцевое смещение:

$$U(1, \tau) = g(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (24)$$

либо торцевая температура:

$$W(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [c, d]. \quad (25)$$

Для решения обратных задач термоупругости для стержня и цилиндра воспользуемся операторными уравнениями, полученными ранее в работах [8, 9] при помощи обобщенного соотношения взаимности и метода линеаризации. Так для нахождения поправок к коэффициенту теплопроводности стержня $\delta \bar{k}^{(n-1)}$ при законе нагружения $\varphi(\tau) = H(\tau)$ получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} R_1(z, \tau) dz = f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [c, d], \quad (26)$$

где ядро интегрального уравнения (26) имеет вид:

$$R_1(z, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau_1} \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau_1 - \tau)}{\partial z} d\tau_1.$$

Для нахождения поправок к модулю Юнга стержня $\delta \bar{E}^{(n-1)}(z)$ при законе нагружения $\lambda(\tau) = H(\tau)$ получено интегральное уравнение:

$$\int_0^1 \delta \bar{E}^{(n-1)} R_2(z, \tau) dz = \mu(g(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau)), \quad \tau \in [a, b]. \quad (27)$$

Решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода вида (26), (27) является некорректной задачей, для ее регуляризации в работе применялся метод А.Н.Тихонова [12].

В работе натурный эксперимент был заменен вычислительным. Безразмерные термомеханические характеристики стержня и цилиндра $\bar{a}(z)$ восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = kz + b$ на основе минимизации функционала невязки, который в случае теплового нагружения имеет вид:

$$J_1 = \int_c^d (f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (28)$$

а в случае механического нагружения его вид будет:

$$J_2 = \int_a^b (g(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (29)$$

На втором этапе на основе решения соответствующих интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода вида (26), (27) находились поправки реконструируемых функций, и строился итерационный процесс их уточнения по схеме $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{a}^{(n-1)}(z)$. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении порогового значения соответствующего функционала невязки (28), (29) равного 10^{-6} .

5. Результаты вычислительных экспериментов

В работе были проведены две серии экспериментов по восстановлению термомеханических характеристик цилиндра и стержня. Вычислительные эксперименты проводились при значениях параметров $\varepsilon = 10^{-6}$, $\mu = 0.1$, $\delta = 0.05$. Найдены информативные временные интервалы для измерения входной информации. Выяснено, что измерение температуры наиболее информативно на интервале $[c, d] = [0, 0.5]$ и 5 точках наблюдения внутри него, а измерение смещения на

интервале $[a, b] = [0, 1]$ и 6 точках наблюдения внутри него. Оказалось, что для достижения порогового значения в соответствующих функционалах невязки требуется, как правило, 3–12 итераций. В случае идентификации характеристик при небольшом градиенте функции погрешность реконструкции не превосходит 10%, а в случае идентификации характеристик с большим изменением в окрестности центра увеличивается до 20%. На рисунках сплошной линией изображен точный закон, точками – восстановленный.

На рис. 1, а представлен результат восстановления возрастающей функции $\bar{k}(z) = (0.4z + 1)^6$, характеризующей коэффициент теплопроводности цилиндра. Начальное приближение $\bar{k}_0(z) = 1.1 + 5.8z$. Потребовалось 3 итерации. Погрешность восстановления на последней итерации не превысила 2%. На рис. 1, б изображен результат реконструкции убывающей функции $\bar{\rho}(z) = 3 - \ln(1 + 5z)$, характеризующей плотность цилиндра. Начальное приближение $\bar{\rho}_0(z) = 3 - 1.8z$. Потребовалось 4 итерации. Погрешность восстановления на последней итерации не превысила 1%. На рис. 2, а представлен результат восстановления немонотонной функции $\bar{E}(z) = 2 - 0.6\sin(\pi z)$, характеризующей модуль Юнга стержня. Начальное приближение $\bar{E}_0(z) = 1.9 - 0.4z$. Потребовалось 8 итераций. Погрешность восстановления на последней итерации не превысила 5%. На рис. 2, б изображен результат реконструкции быстроизменяющейся в окрестности центра стержня функции $\bar{c}(z) = 0.8 + e^{-100(z-0.5)^2}$. Начальное приближение $\bar{c}_0(z) = 1.3$. Потребовалось 12 итераций. Погрешность восстановления на последней итерации не превысила 15%.

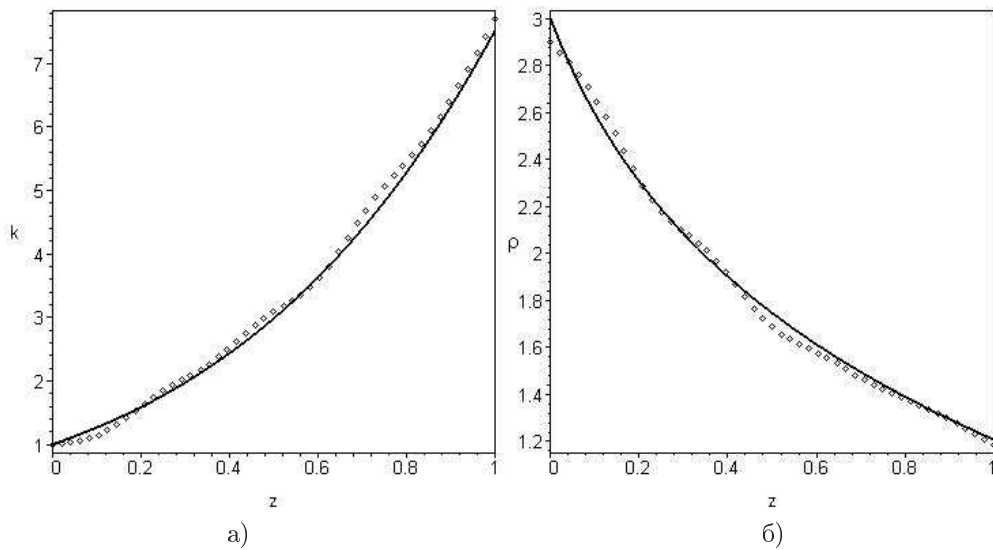


Рис. 1. Реконструкция характеристик цилиндра: а) $\bar{k}(z) = (0.4z + 1)^6$; б) $\bar{\rho}(z) = 3 - \ln(1 + 5z)$.

Работа выполнена в рамках проекта Минобрнауки № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности и при поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 "Фундаментальные проблемы математического моделирования".

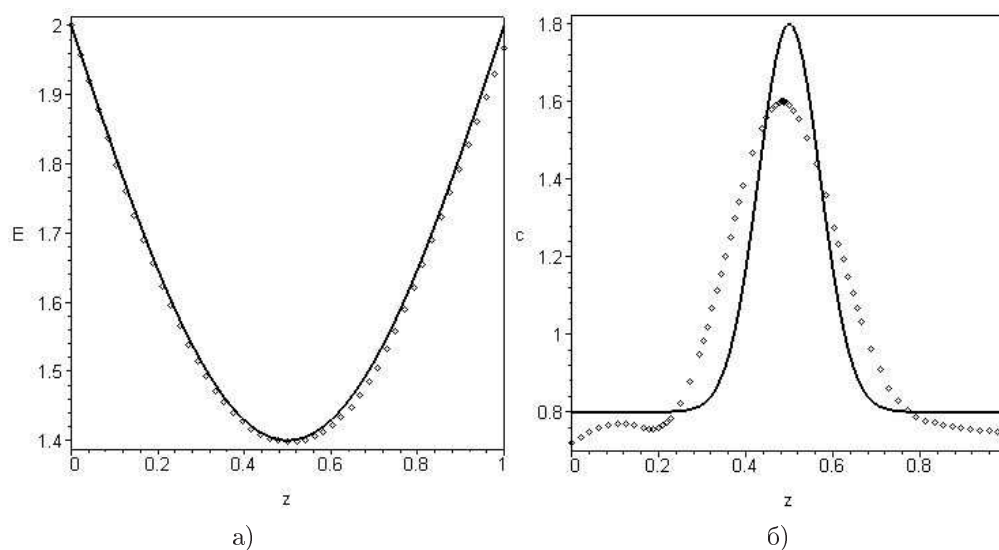


Рис. 2. Реконструкция характеристик стержня: а) $\bar{E}(z) = 2 - 0.6 \sin(\pi z)$; б) $\bar{c}(z) = 0.8 + e^{-100(z-0.5)^2}$.

Summary

A.O. Vatulyan, S.A. Nesterov. The coefficient inverse problem for thermoelastic FGM. Currently, various techniques are widely implemented Functionally graded materials (FGM). FGM-heterogeneous materials that optimize complex designs. The effectiveness of such materials depends on the exact knowledge of the laws of heterogeneity. Previously, the authors have proposed an approach for the solution of coefficient inverse problems of thermoelasticity for a rod. In this paper, this approach is extended to the solution of the problem for the cylinder. The direct problem for a cylinder solved based on the joint use of the Laplace transform and the method of adjustment. For solving the inverse problem on the basis of reciprocity obtained operator ratio establishes the relationship between the desired and measured characteristics. Conducted computational experiments and presents their analysis.

Key words: functionally graded materials, the inverse problem, thermoelasticity, rod, cylinder

Литература

1. Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F., Lee Y.D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // J. of American Ceramic Society. – 1996. – V. 19. – P. 3003–3012.
2. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Composites Science and Technology. – 1996. – No 56. – P. 1099–1104.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
5. Lukaszewicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. of Thermal Stresses. – 2003. – V. 26, No 1. – P. 13–23.

6. *Ломазов В.А.* Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. – Орел: ОрелГТУ, 2002. – 168 с.
7. *Апбасов С.О., Яхно В.Г.* Обратная задача динамической несвязанной термоупругости // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики. – Новосибирск: НГУ, 1986. – С. 63–70.
8. *Ватульян А.О.* К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. – 2010. – № 6. – С. 911–918.
9. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. – 2014. – V. 51(3). – P. 767–773.
10. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
11. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. – 1974. – V. 17. – P. 371–376.
12. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 224 с.

Сведения о каждом из авторов статьи

Ватульян, Александр Ованесович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: *vatulyan@math.rsu.ru*

Нестеров, Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательской части, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: *1079@list.ru*